

## Introdução

Na análise estrutural estática, nem sempre a relação forças aplicadas versus deslocamentos da estrutura pode ser considerada como linear. Tal fato pode ser decorrente das propriedades do material da estrutura e/ou da diferença existente entre as suas configurações indeformada e deformada. Deste modo, os problemas estruturais estáticos podem ser enquadrados em um das seguintes categorias:

- I. fisicamente e geometricamente lineares;
- II. fisicamente não-lineares e geometricamente lineares;
- III. fisicamente lineares e geometricamente não-lineares;
- IV. fisicamente e geometricamente não-lineares.

A maior parte dos problemas estruturais encontrados na Engenharia Civil é tratada como pertencente à primeira categoria acima. No entanto, em alguns casos práticos, como os dos edifícios altos e esbeltos sujeitos a cargas laterais devidas ao vento, os efeitos decorrentes da não-linearidade geométrica são importantes e deveriam ser considerados.

Para tratar esses casos, a TQS implementou no seu sistema um módulo para análise elástica não linear geométrica (NLG) de pórticos espaciais constituídos de barras prismáticas (eixo reto e seção constante) de material elástico linear.

O objetivo deste artigo é apresentar os principais aspectos do módulo NLG MIX-TQS, situando-o dentro do panorama geral da análise não-linear geométrica. Nas seções seguintes, será apresentado um breve resumo da teoria que fundamenta a implementação do novo módulo e que define seu domínio de aplicação. Para um maior aprofundamento nessa teoria, sugere-se, por exemplo, a leitura da bibliografia listada no final desse artigo. Serão também apresentados alguns exemplos que ilustram a importância do uso do módulo em algumas situações do dia a dia da engenharia estrutural.

## **O problema da flexão de barras prismáticas elásticas lineares - hipótese Navier-Bernoulli**

A hipótese cinemática usada no módulo NLG de pórticos espaciais para a análise do problema estrutural da flexão composta de barras prismáticas é a de Navier-Bernoulli. Em tal hipótese, admite-se que seções planas normais ao eixo da barra antes da deformação permanecem planas e normais ao eixo após a deformação. Através da adoção dessa hipótese, os deslocamentos da barra podem ser descritos a partir apenas dos deslocamentos do seu eixo.

A outra hipótese adotada no módulo, a de que o material da barra é elástico linear, implica trabalhar dentro do domínio das pequenas deformações (deformações específicas e distorções pequenas em relação a unidade). Na verdade, tal fato é que torna possível a adoção da hipótese de Navier-Bernoulli, mesmo no caso de flexão com grandes rotações como, por exemplo, a flexão com forte curvatura de uma haste de aço extremamente delgada.

No caso mais geral de flexão, o eixo da barra pode estar submetido a grandes rotações que provocam efeitos não-lineares na resposta estrutural. Conseqüentemente, o caso geral de flexão de barras com material elástico linear enquadra-se na categoria III acima descrita. Alguns autores denominam essa teoria como de 3ª ordem [1].

Dependendo da ordem de grandeza das rotações, pode-se definir 2 casos particulares de flexão: a flexão com rotações moderadas (rotação da ordem de grandeza da raiz quadrada da deformação específica) e a flexão com pequenas rotações (ordem de grandeza da deformação). Obviamente, tais situações são casos particulares da flexão geral, podendo-se deduzi-las a partir da formulação geral através de simplificações compatíveis com a menor ordem de grandeza assumida para as rotações.

A restrição de que a barra está submetida a rotações moderadas não elimina a não-linearidade na resposta estrutural. Assim, esse caso de flexão de barras com material elástico linear também se enquadra na categoria III. Essa teoria também é conhecida como de 2ª ordem.

No caso de flexão de barras de material elástico linear com pequenas rotações, as configurações indeformada e deformada da barra podem ser confundidas e a resposta da estrutura é linear, enquadrando-se na categoria I dos problemas estruturais. Essa teoria também é conhecida como de 1ª ordem.

O tratamento do caso geral da flexão (grandes rotações) em pórticos espaciais é muito complexo. Tal complexidade deve-se principalmente ao fato de que rotações finitas no espaço 3D não podem ser tratadas como vetores. Existem 2 abordagens para esse problema. Na primeira, é necessária a redefinição dos conceitos de momento e rotação [2]. Já na segunda, aplica-se o carregamento na estrutura em pequenos incrementos, atualizando-se em seguida as coordenadas da estrutura. Os incrementos devem ser de tal forma que as rotações ocorridas entre duas configurações sucessivas sejam pequenas e possam ser tratadas como vetores [3].

No módulo NLG MIX-TQS a teoria implementada foi a das rotações moderadas. Nessa teoria, a ordem de grandeza das rotações ainda é pequena comparada à unidade, tornando-se possível tratá-las vetorialmente e considerar as flexões nos dois planos principais da seção da barra como desacopladas. Deste modo, as flexões nos planos principais xy e xz são tratadas independentemente, e seus efeitos superpostos e complementados pelo da torção.

### **Formulação das Equações de Equilíbrio dos Problemas NL Geométrico com Materiais Elásticos Lineares**

A seguir é apresentado um resumo do procedimento descrito na referência [4] para dedução das equações de equilíbrio para estruturas sujeitas a pequenas deformações e em regime elástico linear. Nessa dedução, usam-se o princípio de minimização da energia potencial total e o método dos elementos finitos como ferramenta de discretização.

Nas expressões seguintes representa o vetor que descreve o estado de deformação e , o correspondente vetor energeticamente conjugado que descreve o estado tensional. Do mesmo modo, u representa o campo de deslocamento e F o correspondente campo de força.

Considerando-se a hipótese da linearidade do material e admitindo-se que as forças aplicadas são independentes da deformação, a energia total é expressa por:

$$\frac{1}{2} \int_V B \cdot \delta v - \int_V u' \cdot F \delta v - \int_S u' \cdot F_s \delta s$$

3.1

onde V e S são o volume e a superfície da estrutura na configuração indeformada,

respectivamente. E  $F_s$  representa as forças de superfícies prescritas em  $S$ .

No equilíbrio estático, o funcional é estacionário, logo

$$\int_V (\delta^T B^T \epsilon - \delta^T F) dv - \int_S \delta^T F_s ds = 0$$

3.2

O estabelecimento da expressão 3.2 em termos dos deslocamentos nodais  $r$  requer a introdução das relações deformação-deslocamento. No método dos elementos finitos, tais relações podem ser escritas com

$$\epsilon(r) = \epsilon(r) + \eta(r)$$

3.3

com

$$\epsilon(r) = B^T r \quad \eta(r) = B^1(r)$$

3.4

onde  $B^1$  é função apenas das funções de forma e  $r$ .

Fazendo-se a variação do vetor deformação e executando-se algumas operações algébricas, descritas em [2], chega-se às seguintes relações não-lineares força-deslocamentos:

$$[K_0 + K_0(r)] + K(r) r = K_0(r) r = R$$

3.5

onde

$$K_0 = \int_V B^T B dv$$

$$K_0(r) = 2 \int_V B^T(r) B [B^0 + B^1(r)] dv$$

$$K = \int_V B^T B B^T r dv$$

$$R = \int_V \delta^T F dv + \int_S \delta^T F_s ds$$

3.6

$K_0$  é a matriz secante que relaciona as forças aplicadas aos deslocamentos.

# A implementação computacional MIX-TQS para análise não linear de pórticos

As expressões 3.5 e 3.6 foram deduzidas dentro da teoria geral das estruturas com material elástico linear. As matrizes de rigidez secante utilizadas no módulo NLG MIX-TQS são determinadas particularizando-se tais expressões para o caso de uma barra de eixo reto e seção constante sujeita às condições impostas pelas hipóteses da teoria de segunda ordem de rotações moderadas, comentadas na seção 2 deste trabalho. Para o leitor interessado, as matrizes implementadas no módulo estão explicitadas na referência [5].

Através da expressão 3.5 constata-se que, nos problemas estruturais pertencentes a categoria III, a matriz de rigidez da estrutura passa a ser representada pela soma das 3 parcelas,  $K_e, K_g$  e  $K_s$ , e a clássica matriz de rigidez elástica linear.

No caso de estrutura formada por barras prismáticas sujeitas a rotações moderadas  $K_s$  é a matriz de rigidez geométrica que leva em consideração a interação entre a força axial e o momento fletor na barra.

Já  $K_e$  expressa as forças axiais decorrentes dos deslocamentos nodais perpendiculares ao eixo das barras. A figura a seguir representa um caso onde esse efeito de segunda ordem é importante. Realizando-se uma análise não-linear geométrica desse exemplo, obtém-se como resultado uma força normal não nula atuando na barra. Tal força não pode ser detectada na análise linear.

No módulo implementado, é possível adotar-se na análise não linear:

$$K_s = K_e + K_g + K_e + K_s$$

OU

## Método Empregado na solução do Sistema de Equações Não-Lineares

O sistema de equações expresso em 3.5 é não-linear. Para resolvê-lo, foi implementado no MIX o método de Newton-Raphson modificado, usando-se a matriz de rigidez elástica com matriz secante e considerando-se o vetor força em apenas um incremento.

### Limitações do Módulo Não-Linear Geométrico MIX-TQS

A utilização do módulo só é possível nos casos enquadrados dentro do escopo da teoria de flexão de barras prismáticas de materiais elásticos-lineares sujeitas a rotações moderadas.

O módulo também não converge em situações de equilíbrio pós-crítico ou quando a matriz de rigidez elástica linear da estrutura for singular, por exemplo, no caso de hipostaticidade.

Existem situações onde a contribuição de KI tende a enrijecer fortemente a estrutura. Em tais casos, embora a estrutura possa ser estável, o algoritmo de solução (solver) pode mostra-se ineficiente na determinação da resposta da estrutura.

### Operação do Módulo

O módulo NLG MIX-TQS é rápido e pode ser facilmente utilizado. Com relação aos dados da análise linear, é necessário que sejam fornecidas ao programa apenas as 4 seguintes informações:

*Número máximo de iterações:* a análise não-linear geométrica implementada no MIX-TQS envolve um processo iterativo. É necessário que se defina o número máximo de iterações que o programa deve executar sem que se observe a convergência na análise.

*Tolerância relativa:* parâmetro utilizado pelo programa para verificação da convergência da análise. A convergência na análise será alcançada quando:

$<$  tolerância relativa

onde  $u_i$  é o vetor deslocamento da i-ésima iteração e  $|u_i|$  sua norma euclidiana.

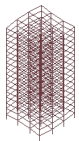
*Fator para multiplicação dos resultados após a análise:* fator a ser aplicado aos resultados (deslocamentos esforços e reações) obtidos na análise não-linear geométrica.

*Consideração ou não da matriz  $K$  da matriz de rigidez secante* indica se a parcela  $K$  deve ser ou não considerada na análise não linear geométrica.

Todos os campos relativos às informações acima têm default que são assumidos automaticamente pelo programa se o usuário não tiver alguma objeção.

## Exemplos

Com o objetivo de mostrar a aplicação do módulo e comparar os seus resultados aos do método de majoração das cargas horizontais, proposto por Vasconcelos[6], são apresentados 4 exemplos.



### 8.1

O primeiro exemplo é o pórtico com 16 pavimentos tipos, mostrado na figura acima, submetido simultaneamente à ação de cargas vertical e lateral. O segundo, terceiro e quarto exemplos são construídos a partir do primeiro aumentando-se o número de pavimentos tipos para 23, 30 e 40, respectivamente.

Para simplificar a análise, nesses exemplos, todos os pavimentos, inclusive o da cobertura, são iguais e as inércias dos pilares são constantes ao longo da sua altura.

A carga lateral é gerada automaticamente pelo sistema TQS e representa o vento na direção X incidindo perpendicularmente em uma das faces do edifício. Para essa direção, os valores do parâmetro de majoração gama, z, para cada um desses exemplos é igual a 1,12, 1,20, 1,30 e 1,41, respectivamente. A análise do pórtico com 40 pavimentos e gama igual a 1,41 está fora do escopo do processo de majoração z, mas é apresentada apenas para efeito de

ilustração.

Na tabela abaixo, são apresentados para cada um dos casos o deslocamento lateral no topo do pórtico (ver nó indicado na figura 8.1) obtido através da análise linear (1a ordem) e da análise não-linear geométrica (NLG). Na tabela também é listado o valor do deslocamento obtido através de uma análise linear considerando-se a majoração das cargas laterais pelo parâmetro  $z$ .

	<b>Gama</b>	<b>z</b>		
	1,12			
	1,20			
	1,30			
	1,41		<b>desloc.</b>	<b>linear</b>
4,8				
	11,5			
	22,0			
	34,3		<b>desloc.</b>	<b>NLG</b>
	5,4			
	14,1			
	29,4			
	50,2		<b>desloc.</b>	<b>método z</b>
	5,3			
	19,9			
	28,6			
	48,4			

Tabela 8.1 - Deslocamentos (cm) na direção X no topo dos pórticos

Verifica-se, na tabela acima, que o processo de majoração produz resultados bem próximos dos da análise NLG. A concordância entre os resultados é maior para os gamas mais próximos de 1,0. Observa-se que mesmo no exemplo com  $z = 1,41$ , que é maior que o limite  $z = 1,30$  recomendado para emprego do processo, o deslocamento no topo do edifício obtido através desse processo difere menos do que 5% do obtido através da análise NLG.

Na tabela 8.2 são apresentados para cada um dos casos o momento na base de um dos pilares do pórtico (ver nó indicado na figura 8.1) obtidos através da análise linear (1a ordem), da análise não-linear geométrica (NLG) e considerando-se a majoração das cargas laterais pelo parâmetro  $z$ .



## **Gama z**

1,12

1,20

1,30

## **Momento linear**

109,2

174,4

244,1

## **Momento NLG**

120,1

204,5

307,7

## **Momento método z**

415,6

121,8

209,3

317,7

432,3

Tabela 8.2 - Momento (tf.m) na base de um dos pilares

Verifica-se na tabela acima, praticamente, o mesmo comportamento do caso do deslocamento lateral no topo dos pórticos.

Finalmente, na tabela 8.3 é apresentada para cada um dos casos a reação horizontal na base

de um dos pilares do pórtico.

**Gama z**

1,12

1,20

1,30

1,41

**reação linear**

19,5

29,7

40,6

50,4

**reação NLG**

20,1

31,3

43,7

	<b>reação</b>	<b>método z</b>
55,4		
21,6		
35,5		
52,6		
70,7		

Tabela 8.3 - Reação horizontal (tf) na base de um dos pilares

Observa-se, na tabela 8.3, que o processo de majoração z superestima as reações horizontais.

Deve-se salientar que, mesmo no exemplo com  $z = 1,41$ , onde os valores obtidos na análise não-linear para o deslocamento horizontal no topo e o momento no apoio são cerca de 50% maiores do que os lineares, as rotações nodais não ultrapassaram em valor absoluto a 0.01 rad ou seja 0,57.

### Comentários Finais

No caso da análise de edifícios altos sujeitos a cargas laterais, a flecha no topo deve ser verificada para várias combinações de carregamentos. A limitação de tais flechas no topo do edifício enrijece a estrutura de tal forma que, na prática, assegura que as suas rotações nessas análises sejam pequenas ou moderadas (relativamente a unidade).

Por exemplo, a referência [3] menciona que, nos casos práticos de edifícios altos sujeitos a cargas laterais, as rotações dificilmente ultrapassam o valor de 1,5 (0,0262 rad). Podendo-se enquadrar, portanto, a maioria de tais análises dentro do escopo da teoria das rotações moderadas. Justifica-se, deste modo, a adoção dessa teoria no módulo NLG MIX-TQS para pórticos espaciais.

Ainda na referência [3], são utilizados vários exemplos de pórticos planos e espaciais para se comparar os resultados obtidos através da análise NLG, do P- e de alguns processos de majoração das forças horizontais [6,7]. A conclusão dessa comparação é transcrita a seguir:

“De um modo geral, deve-se optar pela aplicação de modelos que permitam a análise NLG, que representam melhor o comportamento da estrutura em segunda ordem, são mais gerais e evitam as imprecisões características dos processos aproximados. Cabe lembrar que, mesmo os processos de majoração das ações horizontais, em geral mais eficientes que o processo P-, só devem ser utilizados quando os pórticos forem muito rígidos.”

Finalmente, deve-se observar que o Prof. Vasconcelos [6] alerta que o seu método não deve ser empregado na análise de estruturas com pilares que apresentem grandes variações de inércias, como, por exemplo, no caso de algumas transições e de pilares nascendo em pilar parede.

**Eng. Sérgio Pinheiro Medeiros, mestre COPPE-UFRJ, doutor Poli-USP, responsável pelo Sistema MIX e colaborador da TQS Informática.**

### Bibliografia

- [1] L.F.T Garcia, *Uma Formulação Geral para Flexão Simétrica de Barras Prismáticas de Material Linearmente Elástico*, RBE vol.2/n.1, 1984, pp 65-87
- [2] J.H. Argyris, P.C. Dunne, D.W. Scharpf, *On Large Displacement-Small Strain Analysis of Structures with Rotationl Degrees of Freedom*, Com put. Meths  
Appl. Mech. Engr., 14, 401-451, 1978
- [3] Márcio R.S. Correa, *Aperfeiçoamento de modelos usualmente empregados no projetos de sistemas estruturais de edifício*, Tese de Doutorado USP São Carlos
- [4] D.A. Nagy e M. König, *Geometrically nonlinear finite element behaviour using buckling mode superposition*, Computer methods in applied mechanics and engineering vol. 19, 1979 pp 447-484
- [5] Sérgio R.P. Medeiros e Ricardo L.S. França, *Um programa para análise não linear geométrica em microcomputadores*, Simposio EPUSP sobre estruturas de concreto, 1989, adendo aos anais
- [6] A.C. Vasconcelos, *Como se pode enrijecer Edifícios muito flexíveis*, La Ingenieria Estructural Sudamericana en la decada del 80; Montevideo; Anais, v.1 237-268

Escrito por TQS Admin

Seg, 27 de Dezembro de 2010 15:02 -

---

[7] H. Beck, G. König, *Criteria for Judging the Stiffness of Framed Structures*, IABSE Symposium, London Proceedings, 37-45